Enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Théorème : L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (notée $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ dans la suite) est la boule unité pour la norme $||.||_2$.

Lemme 1 : Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \mathrm{Tr}(A\cdot)$.

Lemme 2 (admis) : Soit C_1 et C_2 des convexes non vides et disjoints d'un espace vectoriel normé E. Si C_1 est fermé et C_2 compact, il existe un hyperplan H qui sépare K_1 et K_2 au sens suivant :

$$\text{Il existe } \phi \text{ une forme linéaire continue sur } E \text{ telle que } \sup_{a\in C_1} \phi(a) < \inf_{b\in C_2} \phi(b).$$

Lemme 3 (admis) : L'application suivante est surjective

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+ & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \longmapsto & OS \end{array}.$$

Preuve du lemme 1 : Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En posant $A = (\varphi(E_{i,j}))_{1\leq i,j\leq}$ on a

$$\forall M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}, \mathrm{Tr}(AM) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi(E_{j,k}) m_{j,k}.$$

Le terme de droite est exactement égal à $\varphi(M)$ (on écrit M comme combinaison linéaire des éléments de la base canonique et on développe avec la linéarité). $\square$

Preuve du théorème : On sait que les éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ préservent la norme euclidienne donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathrm{B}(0,1)}$. Comme $\overline{\mathrm{B}(0,1)}$ est clairement convexe, on a la première inclusion, à savoir $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \subset \overline{\mathrm{B}(0,1)}$.

Pour montrer l'inclusion réciproque on se donne $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $||M||_2 \leq 1$. Dans l'hypothèse où $\{M\} \cap \mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \emptyset$, le théorème de Hahn-banach géométrique (lemme 2) nous donnerait l'existence d'une forme linéaire (continue) ϕ telle que

$$\phi(M) > \sup_{a\in \mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))} \phi(a).$$

Il suffit donc de montrer que pour tout forme linéaire ϕ, $\phi(M) \leq \max_{a\in\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))} \phi(a)$! Soit donc ϕ une telle forme linéaire. Par le lemme 1 on peut se donner une matrice A telle que $\phi = \mathrm{Tr}(A\cdot)$. Le lemme 3 nous donne la décomposition polaire $A = OS$ où O ets orthogonal et S symétrique positive. Comme S est symétrique on peut se donner une base orthogonale de vecteurs propres $(v_1, ..., v_n)$ grâce au théorème spectral.
Ainsi on a $\mathrm{Tr}(AO^{-1}) = \mathrm{Tr}(OSO^{-1}) = \mathrm{Tr}(S)$ car la trace est in invariant de similitude. Comme S est diagonale dans la base $(v_1, ..v_2)$ on sait que sa trace est la somme de ses valeurs propres donc on en déduit

que $\mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} ||Sv_i||_2$: $Sv_i = \lambda_i v_i$ donc $||Sv_i||_2 = ||\lambda v_i||_2 = |\lambda_i| ||v_i||_2$ ce qui est suffisant car $\lambda_i \geq 0$ (S est positive) et $||v_i||_2 = 1$ par hypothèse.
Comme $(v_1, ..., v_n)$ est orthogonale, le coefficient en position (i, j) de la matrice MA est égale à $\langle MAv_j, v_i \rangle$ donc $\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(MA) = \sum_{i=1}^{n} \langle MAv_i, v_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle Av_i, M^* v_i \rangle$ où M^* désigne l'adjoint de M. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient alors

$$\mathrm{Tr}(AM) \leq \sum_{i=1}^{n} ||Av_i||_2 ||M^* v_i||_2.$$

Pour finir on remarque que $||Av_i||_2 = ||Sv_i||_2$ (car O est une isométrie) et $||M||_2 = ||M^*||_2$ (c'est encore Cauchy-Scwarz) donc $||Mv_i||_2 \leq 1$. Ainsi,

$$\mathrm{Tr}(AM) \leq \sum_{i=1}^{n} ||Sv_i||_2 = \mathrm{Tr}(AO^{-1}) \leq \sup_{a \in \mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))} \phi(a) \text{ car } O^1 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}). \square$$

Pré-requis importants : Il faut

- être à l'aise sur les propriétés de base de l'adjoint d'un endomorphisme
- avoir une idée de preuve des lemmes admis, même partielle (ça fait mieux le jour J)
- s'approprier la preuve ! Il en existe des tonnes sur ce développement, il faut faire attention à ne pas se mélanger les pinceaux